Das Chinesische Labyrinth

von Dr. Carsten Elsner

24. Dezember 2020

Vom CrypTool Team neu überarbeitet und um SageMath Beispiele ergänzt,
siehe: www.cryptool.de
Danke an: https://www.heise.de/ct/Redaktion/bb/story/Labyrinth.htm

Primzahlen offenbaren überraschende Eigenschaften der natürlichen Zahlen – einige davon können Sie hier in dieser historischen Geschichte erfahren, in der der *Große Khan* an mehr interessiert ist, als nur an den rein intellektuellen Fähigkeiten seiner zukünftigen Beamten und Berater.

Bewerbung in *K* …

Markus Paulsen ist 24 Jahre alt, hat ein Harvard-Informatik-Diplom in der Tasche (allerdings liegt es gerade vor ihm auf dem Tisch), und er geht seine Jobsuche mit ungetrübtem Optimismus und Selbstvertrauen an. Natürlich hält er sich für einen so erfahrenen Computerspezialisten, dass man es hier im Technologiezentrum in *K* gar nicht verantworten kann, ihm als hochmotivierte, dynamische Fachkraft die Türe zu weisen. Aber vor Markus sitzt nun erst einmal ein ziemlich verschmitzt lächelnder Professor, der als Institutsleiter eben das Bewerbungsgespräch mit ihm beendet hat und ihn doch zunächst vor die Tür hinauskomplimentiert. „Ich möchte mich mit meinem Assistenten kurz beraten. Wenn Sie sich bitte draußen für einige Augenblicke gedulden …“

Man befindet sich hier in der Forschungsabteilung für Kryptographie und rechnergestützte Verschlüsselungstechniken.

Hochleistungsrechner werden hier nach immer neuen Verfahren programmiert, um dann in oft tagelanger Rechenarbeit Teiler von riesigen Zahlen zu finden und so eine zusammengesetzte Zahl in ihre Bestandteile zu zerlegen – eine Notwendigkeit, die bei fast jeder Dechiffrierung unumgänglich ist. Aber beim Aufsuchen von solchen Teilern wird nicht planlos herumprobiert, sondern mit raffinierten Tricks und Ideen gearbeitet, um die Rechenzeit zu verkürzen. Und eben hierfür sucht der Professor Unterstützung durch einen neuen Mitarbeiter.

„Der Bursche ist ja nicht gerade dumm, aber sind seine Programmierkenntnisse für uns wirklich von so großem Nutzen?“ fragt vorsichtig der etwas blassgesichtige Assistent, nachdem die Tür hinter Markus ins Schloss gefallen ist. „Mit Rechnern kennt er sich hinlänglich aus“ erwidert der Professor, „und das übrige gilt es noch zu prüfen. Der junge Mann muss sich erst noch die Hörner abstoßen, auf die er so stolz ist, und dabei bin ich ihm gerne behilflich!“ Der

Assistent schaut den Institutsleiter fragend an, der seinerseits wieder das verschmitzte Lächeln aufgesetzt hat und begonnen hat, in einer Schreibtischlade zu kramen. „Irgendwo hier muss es doch sein!?! …“ Der Professor ist für seine ungewöhnlichen Methoden bei der Suche nach neuen Mitarbeitern im Hause bekannt, und so harrt der Assistent der Dinge, die sein Chef diesmal ausbrütet. „Ah, hier ist es ja!“ Der Professor zieht einige Blätter hervor. „Diesen Text habe ich schon als Doktorand meinen Studenten vorgelegt.“ Er grinst schelmisch. „Und alle haben sich darüber den Kopf zerbrochen. Herr Paulsen wird damit auch nicht verschont. Wenn er die Lösung bis morgen findet, bekommt er die Stelle. Rufen Sie ihn bitte wieder herein!“

Als der immer noch grenzenlos optimistische Kandidat wieder dem Professor und seinem Assistenten gegenübersitzt, werden ihm die Blätter über den Tisch geschoben. Doch zu seinem Erstaunen ist es nicht der erwartete Anstellungsvertrag. Mit gespieltem, aber nicht übertriebenen Pathos erklärt ihm hierzu der Professor: „Ein bekannter deutscher Historiker hat in einer Bibliothek in Padua einige mittelalterliche Handschriften entdeckt, die nach Stil und Inhalt zweifellos nach dem Diktate Marco Polos niedergeschrieben worden sind. Marco Polo berichtet darin über eines seiner seltsamsten Abenteuer in China, durch dessen glücklichen Ausgang er zum Berater des Großkhans aufgestiegen ist. Leider fehlen die letzten Seiten des Manuskripts. Nach diesen Aufzeichnungen verdankt Polo seine Stellung am Hofe des Khans der Fähigkeit, gewisse große Zahlen als zusammengesetzt zu erkennen.“ Im verdutzten Gesicht von Markus Paulsen stehen einige Fragezeichen. Jedoch unbeirrt fährt der Professor fort, auf die Blätter vor ihm deutend: „Das hier ist eine Übersetzung des Manuskripts, die der Historiker mir geschickt hat. Lüften Sie bitte bis morgen Nachmittag das Geheimnis der fünften Kammer, und Sie sind unser Mann! Außerdem heben Sie dabei den Schleier über einem bis heute noch dunklen Punkt in der Biographie des weitgereisten Venezianers. Wundern Sie sich nicht: mit solchen Problemen aus allen Teilen der Welt werden wir hier regelmäßig konfrontiert. Aber lassen Sie Ihr Notebook ausgeschaltet: Marco Polo hatte bestenfalls einen Abakus im Reisegepäck.“

Der Professor erhebt sich und streckt Paulsen rasch die Hand zur Verabschiedung entgegen, um jede Erwiderung oder Frage im Keim zu ersticken. „Ich sehe Sie hier morgen wieder um 15:00 Uhr.“ Ehe der junge Mann sich versieht, steht er schon vor der Tür zum Büro des Professors. Sein Optimismus hat einen herben Dämpfer erlitten. Mit einem flauen Gefühl in der Magengegend macht er sich auf den Rückweg in sein Hotel. Dort verlängert er seinen Aufenthalt um einen Tag, schließt sich in sein Zimmer ein und vertieft sich in der Hoffnung auf einen noch glücklichen Ausgang seiner Bewerbung in das Manuskript:

Bewerbung beim Khan

„…Im übrigen muss ich noch von jenem gefährlichen Tage berichten, an dem ich die allerhöchste Gnade des Sohnes der Sonne erfuhr. Es ist in diesem Lande nämlich Brauch, alle Anwärter auf ein Amt im Staate streng zu prüfen – je höher das Amt, desto umfangreicher und schwieriger die Auswahl der Kandidaten. Da mich der Großkhan als persönlichen Berater um sich wissen wollte (was nur einem Mandarin oberhalb der 37.-ten Rangstufe der kaiserlichen Hofhierarchie zusteht), musste ich mich mit zwei Mitbewerbern der vorgesehenen Prüfung unterziehen: es waren dies der kaiserliche Hofastronom, der ehrenwerte und allseits geschätzte Meister Hyan Li–Pu sowie der aus der Provinz Kiangnan angereiste berühmte Mathematiker Meister Wan Chi.

Wir drei fanden uns auf allerhöchsten Befehl in einer Halle ein, wo uns ein Mandarin der 38.-ten Rangstufe die Prüfung erläuterte. Er sagte mit umständlichen Worten etwa folgendes: ‚Ehrenwerte Herren! Mögen Euch an diesem Tag die Götter beistehen! Denn Ihr werdet gleich ein Labyrinth betreten, dessen Pforte hinter Euch verschlossen wird. Euer Leben hängt alsdann nur von Eurer Klugheit ab – aber wer des allerhöchsten Nähe (hier verbeugte sich der Mandarin) sucht, muss todesmutig sein! Wohl möget Ihr den Ausgang finden und das Licht der allerhöchsten Sonne erblicken‘ – wieder verbeugte sich der Hofschranze. ‚Unter denen, die glücklich den Ausgang finden, wird das Amt geteilt. Doch nun hört: Ihr gelangt in eine Kammer, in der Ihr die Auswahl habt, Euren Weg in zwei Gängen fortzusetzen. Doch gebt acht: sobald einer von Euch die Kammer verlassen hat, werden alle Ausgänge dieser Kammer nach wenigen Augenblicken geschlossen. Entweder entscheidet Ihr Euch alle für denselben Weg, oder aber ihr trennt Euch. Wer zaudert und zurückbleibt, ist für elf Jahre eingemauert, denn vor Ablauf dieser

Zeit darf sich niemand um dieses Amt bewerben und in diesem Labyrinth geprüft werden. Solange wird es von keinem Menschen betreten. Doch auch wehe dem, der den falschen Ausgang einer Kammer wählt! Dann endet der Gang, den er betreten hat, als Sackgasse, und er ist gleichfalls eingeschlossen. Nur der richtige Ausgang führt in eine neue Kammer.‘

Mir wurde zunehmend unbehaglicher zumute. Der Mandarin aber fuhr in dunklen Worten fort: ‚Aber Eure Klugheit wird Euch bewahren und die richtige Entscheidung treffen lassen. Denn merkt Euch: in jeder der fünf Kammern findet Ihr etwas, das geteilt werden kann oder nicht. Wer meint, das Ding ist teilbar, der wähle den Ausgang zur linken Hand, wer anderer Meinung ist, benutze den Gang zur rechten Hand. Und nun frage ich Euch: Wer tritt von der Bewerbung zurück …?‘

Mich durchfuhr es heiß und kalt. Meine Weigerung hätte dem persönlichen Wunsch des Khans entgegengestanden, mich dieser Prüfung zu unterziehen, was mit unausweichlicher Gewissheit mein Todesurteil gewesen wäre. So hatte ich aber wenigstens noch eine geringe Hoffnung auf einen glücklichen Ausgang des Abenteuers, und ich gab dem Mandarin durch ein leichtes Kopfnicken meine Bereitschaft zu verstehen. Keiner von uns sagte etwas, auch die beiden anderen schüttelten nur leicht den Kopf. ‚So sei es denn!'

Ein Gong wurde geschlagen, und der Mandarin geleitete uns bis an den Eingang des gefährlichen Labyrinths. Mit klopfendem Herzen und weichen Knien trat ich als letzter durch die Pforte in den dahinterliegenden Gang und wandte mich noch einmal um. Der Mandarin verbeugte sich, ein Gongschlag ertönte und mit ohrenbetäubendem Rasseln fuhr eine Tür herunter und verschloss den Eingang. Ich schlug ein Kreuz über der Brust, verrichtete ein Stoßgebet und schloss mich den beiden anderen an, die scheinbar unbeirrt schon vorangegangen waren.

Wie von dem Mandarin angekündigt,

endete der dunkle Gang bald in einem von zwei Fackeln erhellten Raum. “

Kammer Eins

In den beiden Seitenwänden gähnten dunkle Löcher und zeigten uns unsere Alternativen an. Sonst konnte ich in dem Raum zunächst nichts erkennen, und ich suchte vergeblich nach einem Gegenstand, wie ihn der Mandarin gemeint haben könnte. Ratlos folgte ich den Blicken meiner Begleiter, die auf die gegenüberliegende Wand starrten. Einige Schriftzeichen waren dort aufgemalt, und obwohl ich im Lesen der chinesischen Schrift nicht unerfahren bin, bat ich aus Höflichkeit Meister Wan um die Übersetzung. Der sonst so vornehme Mann schaute mich mit einem herablassenden Blick an, dann sagte er: „Dort steht nur eine Zahl: 8633“. Ich war verblüfft. Unser aller Leben hing also davon ab, ob wir Teiler dieser Zahl finden oder nicht! Und ich wurde stutzig: Hat mir Meister Wan wohl die richtige Zahl genannt? Denn immerhin bewarben wir uns um dasselbe Amt! Aber rasch überzeugte ich mich, dass er die Wahrheit gesagt hatte und begann über das gestellte Problem nachzudenken. Etwas unschlüssig begann ich schließlich eine Diskussion. „Haben die Herren einen Vorschlag?“ fragte ich, um die Stille zu unterbrechen. Meister Li ließ sich zu einer Antwort herab. Man merkte ihm an, dass er uns nur ungern von seinem Wissen etwas mitteilte. „Deutet man diese Zahl als den Inhalt eines Quadrats, so können von zwei vielleicht vorhandenen Teilern nicht beide größer sein als die Länge einer Seite.“ Mir leuchtete das ein, und Meister Wan setzte den Gedanken als ein geschickter Kopfrechner gleich praktisch um: „Ein solcher Teiler, falls es ihn gibt, ist dann kleiner als 93, und es reicht, diejenigen Zahlen auszuprobieren, die selbst keine echten Teiler haben, also nach Eurem Gebrauch“ – hier blickte mich der chinesische Rechenmeister schief von der Seite an – „Primzahlen heißen.“ Ich staunte über die Kunstfertigkeit der beiden Chinesen, und da ich noch keinen Beitrag zur Diskussion geleistet hatte, blickte ich verlegen zur Seite. Dabei entdeckte ich im Halbdunkel einer Ecke der nur von den beiden Fackeln spärlich beleuchteten Kammer schemenhaft einen Gegenstand am Boden liegen. Ich trat hinzu und hob einen Abakus auf, neben dem noch einige Kreidestücke lagen. „Seht doch, man gibt uns etwas Hilfestellung“, bemerkte ich in etwas gehobener Gemütsverfassung.

Meister Li nahm mir jedoch gleich den Abakus aus den Händen und begann wortlos die Kugeln hin- und herzuschieben. Ich spürte seine Ungeduld, und ich habe deutlich die Überheblichkeit des Chinesen wahrgenommen, mir als Italiener den Gebrauch dieses alten Rechengerätes nicht zuzutrauen. Nach einigen Minuten verkündete Meister Li tonlos: „8633 ist das Produkt der Zahlen 89 und 97, also keine Primzahl.“

„Somit nehmen wir den rechten Gang! Wenn die werten Herren vorgehen wollen!“ bot Meister Wan an. Ich durchschaute sofort seine Absicht.

Wohl hatte ich mir genau gemerkt, dass im Falle der Teilbarkeit der linke Gang gewählt werden musste. Ich wusste, dass ich mich auf mein Gedächtnis in diesem Punkt genau verlassen konnte, und suchte nach einer höflichen Erwiderung. Wären Meister Li und ich vorangegangen, wie von Wan vorgeschlagen, hätte der im letzten Augenblick sicher den anderen Gang betreten und hätte uns unserem Hunger- und Erstickungstod überlassen. Auch Meister Li bemerkte die so offenkundig hinterhältige Absicht und korrigierte mit nur mühsam unterdrücktem Zorn den Vorschlag, um nicht schon in der ersten Kammer offenen Streit hervorzurufen. Nur allzu rasch und ohne Erwiderung ließ sich Wan vom Gegenteil überzeugen und betrat sogar als zweiter nach Meister Li den linken Gang. Ich folgte den beiden hastig, und kaum war ich in das Dunkel eingetaucht, spürte ich hinter mir schon den Luftzug der nieder rasselnden Mauer. Schwarze Dunkelheit umgab mich. Ich stieß mit dem Kopf an die Decke des niedrigen

Ganges und kam nur mühsam vorwärts, mit den Händen an den Wänden tastend. Vor mir in einiger Entfernung hörte ich die beiden Chinesen, zwischen denen nun doch offener und lauter Streit ausgebrochen war – vermutlich wegen des Vorfalls eben in der Kammer.

Kammer Zwei

Plötzlich stieß in der Dunkelheit mein Fuß an etwas: es waren Kugeln. Die beiden Toren waren in ihrem Streit gewiss handgreiflich geworden, und dabei war der Abakus zu Bruch gegangen! Ich sah jede Hoffnung schwinden. Endlich gewahrte ich vor mir einen Lichtschein und stand bald neben den beiden Streithähnen in der zweiten Kammer. Die beiden hatten sich so rasch wieder beruhigt wie sie aneinander geraten waren. Erst jetzt wurde mir bewusst, dass ich in meinen rechten Ärmel ein Stück Kreide aus der ersten Kammer gesteckt hatte, und an dieses unbedeutende Ding klammerte sich nun meine ganze Hoffnung.

In diesem Raum wurden wir von der Zahl „Vermehre drei Millionen und Zweihundertvierzigtausend um Eins“ an der Wand begrüßt. „Hilf Himmel“, sagte ich laut, nachdem Meister Li die Zahl aus dem Chinesischen übertragen und mir vorgelesen hatte, „die werden ja immer größer!“ Ich mochte gar nicht daran denken, was uns in der fünften Kammer erwartet, falls wir überhaupt soweit vordringen sollten. „Höchst ehrenwerter Gebieter, vor dem wir im Staube uns beugen“, erwiderte Meister Wan in der devoten Gebildetensprache seines Landes, „alles lässt sich durch den Verstand begreifen. Man hat diese Zahl für Deine gebildeten und weit gereisten Augen nicht ohne Grund so ausgewählt und dort angeschrieben. Lasst uns gemeinsam überlegen!“ Trotz unserer bedrohlichen Lage musste ich heimlich über diese gedrechselte Beamtensprache lächeln, fühlte mich aber doch geschmeichelt. Ich blickte verstohlen auf Meister Li. Der schaute eher fragend Herrn Wan an und schien dessen Optimismus gar nicht so recht zu teilen.

Die folgenden Ereignisse in dieser zweiten Kammer spielten sich wider Erwarten in nur wenigen Augenblicken ab, da Meister Li die Beherrschung verlor. Das kam so. Meister Wan, der nicht nur ein hervorragender Mathematiker, sondern auch ein geübter Kopfrechner war, dachte laut nach, dabei starr auf die Schriftzeichen an der Wand starrend. „18 mal 18 ergibt 324, demzufolge ist 3 240 000 auch 1800 mal 1800. Und das Doppelte von 1800 ergibt 3600, und das ist das Quadrat von 60.“ Ich konnte zwar die Rechnung verfolgen, verstand aber gar nicht, was das mit dem gestellten Problem der Auffindung von Teilern der Zahl 3 240 001 zu schaffen haben sollte. Meister Li’s Gesicht zeugte von derselben Hilflosigkeit. Unbeeindruckt fuhr Herr Wan fort:

„Unsere Zahl dort ist also nicht nur das um Eins vermehrte Quadrat von 1800, sondern auch eine Summe aus dem Quadrat von 1799 und dem Quadrat von 60.“ Der Meister blickte endlich von der Wand auf Herrn Li und mich, lächelte wie ein kleines Kind und verkündete: „Die Zahl ist somit eine zusammengesetzte.“ „Hätte der Herr nun auch die Güte, uns einen Teiler derselben zu nennen?“ schrie Meister Li, der dem Mathematiker überhaupt nicht traute und zusehends die Geduld hervor. „Erst den Abakus zerbrechen, und nun so tun, als ob der Herr alles wüsste.“ „Ich kann keinen solchen echten Teiler nennen, ich weiß nur, dass es einen solchen gibt“ erwiderte Wan in aller Seelenruhe. „Das ist doch der Gipfel!“ Die Stimme von Li überschlug sich. „Die Götter mögen mich vor dem Scharlatan behüten.“ Und unversehens stürmte Li in den rechten Gang, dessen Eingang sich sofort hinter ihm verschloss. „Kommen Sie!“ Wan packte mich am Arm und nötigte mich in den Gang zur linken Hand, den wir beide gerade eben noch erreichten, ehe auch hier die Wand niederfuhr. Ich hatte keinen Augenblick den Gedanken Wans folgen können, und bezweifelte, dass ich hier im Labyrinth einer längeren Erläuterung würde folgen können. So stellte ich keine Fragen, und war froh, als wir nach etlichem Herumtasten in dem dunklen Gang endlich in einer neuen Kammer anlangten. „Gott sei seiner Seele gnädig!“, sagte ich halblaut im Gedenken an Meister Li. Herr Wan schien unbeeindruckt.

Kammer Drei

Ich atmete tief durch, und kämpfte wieder gegen meine aufkeimende Furcht. Meister Wan hatte sich schon mit den Schriftzeichen an der Wand beschäftigt. Er wandte sich zu mir um und sagte: „Hochgeehrtester aller Freunde, in Demut wage ich zu behaupten, dass wir hier keine Probleme haben werden. Dort – Wan deutete auf die Wand – werden wir aufgefordert, alle Zahlen von Eins bis Einhundert miteinander zu multiplizieren und das Ergebnis noch um Eins zu vermehren.“ Wan sah mich erwartungsvoll an. Ich fingerte meine Kreide umständlich aus dem weiten Ärmel meines chinesischen Gewandes und begann, an der einen Seitenwand mit der Ausführung der Rechnung. „Verzeiht es einem ungebildeten Bauern, wenn er Euch wagt zu stören.“ Mir missfiel zunehmend der so höhnisch devote Tonfall. „Aber könnt ihr abschätzen, wie groß diese Zahl ist und wie groß die Gefahr, Euch bei ihrer Berechnung zu vertun?“ Ich hielt inne und schüttelte den Kopf. „Mit Eurem arabischen Zahlensystem benötigt ihr gewiss mehr als einhundert Ziffern zu ihrer Niederschrift. Lasst mich Euch untertänigst fragen: Ist 101 eine Primzahl?“ „Diese Zahl kommt doch gar nicht dabei vor!“ erwiderte ich vorwurfsvoll. „Bitte, Herr, beantwortet meine Frage!“ „Gewiss, 101 ist eine Primzahl.“ „Und daher teilt sie unsere riesige Zahl! Folgt mir also in den linken Gang, wenn Ihr meinem schwachen Verstand die Ehre zu geben bereit seid!“ – Ich war wieder verblüfft. In der vorigen Kammer erkannte Wan, dass die dortige Zahl zusammengesetzt ist, ohne einen Teiler nennen zu können; hier gab er den Teiler 101 einer Zahl an, die er gar nicht gesehen hat. Ich begann an seinem Verstand zu zweifeln. Aber Meister Wans selbstsicheres Auftreten ließen mir keine andere Wahl, und ich folgte ihm in den niedrigen Gang, in dem wir nur noch in gebückter Haltung vorwärts kamen.

Kammer Vier

Bald erreichten wir die vierte Kammer, und das zeugte ja davon, dass Wan doch wieder Recht gehabt hatte. Im Vertrauen auf den Meister übersetzte ich laut die Schriftzeichen an der Wand dieses Raumes. „Jetzt zähle die Schuppen am Panzer des großen Drachens: Es sind dies eine mehr als das Ergebnis deiner Bemühung, zweiunddreißig mal die Zwei mit sich selber zu vervielfachen. Hüte dich vor dem großen Drachen!“ Erwartungsvoll blickte ich auf Meister Wan. Doch ich erschrak: der sonst so selbstsichere Mann war blass geworden. Er setzte sich auf den Boden, ließ den Kopf hängen und sagte mit bitterer Ironie: „Nun, an dem klugen Mann aus dem fernen Europa werde ich wohl nun meinen Meister finden! Denn hier bin ich überfragt. Nach meinem Wissen vermutet man, dass die Zahl der Schuppen eine Primzahl ist – aber mehr ist mir nicht bekannt! – Welche Antwort haben die Weisen in Europa auf die Frage nach den Schuppen des großen

Drachens? Aber wehe, Ihr erweist Euch nun als Aufschneider und Blender, wie ich schon lange vermutet habe!“ Ich erwiderte leise: „Meister! Ich bin kein Gelehrter wie ihr, noch habe ich die hohe Rechenkunst in Paris oder in meiner Heimatstadt studiert.“ Und leiser fügte ich hinzu: „Ich kann Euch auch keine Antwort geben!“

Kammer Fünf

Meister Wan schien von mir auch nichts anderes erwartet zu haben. Ich musste mit ansehen, wie dieser eben noch so stolze Mann leise vor sich hinweinte, und als er nach geraumer Zeit immer noch flennend dasaß, schlug ich entschlossen vor: „Wie sind hier in der vorletzten Kammer. Wenn wir, ohne auf die Schriftzeichen zu achten, willkürlich einen Gang auswählen und im Falle der glücklichen Wahl in der letzten Kammer ebenso verfahren, begeben wir uns vielleicht auf den einzig richtigen von vier Wegen und überleben beide. Sollten wir uns aber hier trennen, so wird einer von uns den Ausweg aus diesem Labyrinth unter nur zwei Möglichkeiten wählen können. Wollen wir das Los werfen?“ Nach einiger Zeit hob Wan langsam den Kopf. „Ich bin einverstanden.“ Wir warfen eine Münze, und Fortuna wies mir wieder den linken Gang zu. Ich drückte Meister Wan zum Abschied die Hand, aber sein weichlicher Händedruck und das ängstliche Gesicht verrieten wenig

Haltung. „Nun denn!“ Ich betrat ohne weitere Worte rasch den linken Gang, und die hinter mir niederfahrende Mauer schloss mich in Dunkelheit und Einsamkeit ein.

Unbeschreiblich ist das Glücksgefühl eines Eingeschlossenen, wenn er vor sich wieder einen Lichtschein sieht. Ich taumelte benommen in die fünfte Kammer und sank in einer Ecke des Raumes zusammen. Vor mein inneres Auge drängten sich die grausigen Szenen, die sich hier wenige Zoll von mir entfernt hinter den dicken Mauern abspielen mussten. Gleich darauf erschrak ich, denn bei einer letzten falschen Entscheidung konnte mich immer noch dasselbe Los treffen. Ich entsetzte mich über die Unmenschlichkeit dieser barbarischen Hofbeamten, mitleidslos die Menschen verfaulen zu lassen, die auf demselben Weg durch die Fehlentscheidung eines Augenblicks gescheitert waren, auf dem sie selbst einst erfolgreich aufgestiegen waren – vielleicht nur durch Zufall begünstigt. Ob sie wohl eine Schadenfreude empfinden, wenn sie nach Jahren die traurigen Überreste eines Kandidaten finden und wegschaffen? Über solchen trüben Gedanken schlief ich ein und träumte Unbeschreibliches.

Ich erwachte schließlich und kam mühsam auf die Beine; wie Blei lag es auf mir – auf meinem Körper und in meinem Hirn. Ich ergriff eine Fackel und beleuchtete die Schriftzeichen an der Wand gegenüber. Die Übersetzung fiel mir schwer, obgleich ich doch in dieser Kunst geübt war. Schließlich las ich: „Vervielfältige die Vier fünfzehn mal und alsdann die Fünfzehn viermal. Deine Ergebnisse füge zusammen zu himmlischer Harmonie und entscheide dann über dein Geschick!“

Welch ein Sarkasmus! Wer die himmlische Harmonie nicht erkennt, darf auch dem Himmlischen nicht dienen und bezahlt seine Verwegenheit mit dem Leben. Na gut denn! Ich sah die Aufforderung, die Ergebnisse zusammenzufügen, als Additionsaufgabe an, und rechnete mit der Kreide an der Wand:

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}^{15\ \text{mal}} + 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \\
&= 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 + 225 \cdot 225 \\
&= 1\,073\,792\,449
\end{aligned}
$$

Ich betete zu Gott, dass das Ergebnis stimmt. Doch sank mein Mut ins Bodenlose, als ich diese Zahl betrachtete. Wenn es irgendwelche Teiler geben sollte, so müssen sie klein sein, sonst habe ich keine Möglichkeit sie zu finden. Ich hockte mich wieder in die Ecke und bekritzelte die Wände. War zuviel Raum beschrieben, wischte ich mit meinem Ärmel das Geschreibsel wieder aus. Ich probierte verzweifelt alle mir bekannten kleinen Primzahlen durch – immer blieb ich erfolglos, keine wollte teilen. Immer rascher rechnete ich; ich konnte mich nicht zu einer ruhigen Arbeit aufraffen. Mit der wachsenden Begierde, einen Teiler zu finden, wuchs auch die Angst, einen Teiler durch einen Rechenfehler zu übersehen. Aber keine Rechnung führte zum Ergebnis: 1 073 792 449 blieb trotz meiner Anstrengungen teilerlos. Immer mehr drängte sich mir die Vermutung auf, es mit einer Primzahl zu schaffen zu haben.

Kammer Fünf, Fortsetzung

Doch wer will in einer solchen Lage, in der es auf Leben oder Tod geht, nicht alle Möglichkeiten geprüft haben. So rechnete ich wild weiter, ohne auf ein Ende abzustellen und ohne darüber nachzudenken, dass ich alle in Frage kommenden Teiler hier gar nicht ausprobieren kann. Schließlich, als ich gerade die Zahl 293 prüfte, fanden meine Bemühungen ein jähes Ende: die Kreide ging mir aus. Ich sank in meiner Ecke zusammen. Wie lange ich so dagelegen habe, weiß ich nicht. In meinem Kopf tobte ein Orkan. Durch äußerste Willensanstrengung zwang ich mich für einen Augenblick zur Ruhe und schätzte meine Lage ein. Zwei Gründe sprachen dafür, den rechten Ausgang der Kammer zu wählen: erstens hat doch eine Zahl, wenn sie *keine* Primzahl ist, im überwiegenden Teil aller Fälle einen kleinen Primteiler, und einen solchen habe ich hier nicht gefunden. Und zweitens waren in den vorherigen Kammern nie Primzahlen gewesen, und

sich für eine solche hier nun zu entscheiden, bedeutete auch eine sicher beabsichtigte Mutprobe, da jetzt Rechnungen wegen der Größe der Zahl allein nicht zum Ziel führen können. Aber welcher Mensch mag sein Leben auf dieses Wagnis setzen?
Es fehlte mir an Willenskraft und Wissen, das Verhältnis günstiger und ungünstiger Möglichkeiten in meinem Fall abzuschätzen, und so entschied ich mich für den rechten Gang.

Lange wagte ich nicht, meinen Weg in der beschlossenen Richtung fortzusetzen. Was mir jetzt durch den Kopf ging, soll die Feder auf dem Papier nicht wiederholen. Nach einem verzweifelten Gebet überschritt ich hastig die Schwelle und stieß sofort mit dem Kopf derb an ein Hindernis. Ich war davon so benommen, dass ich die hinter mir niedersausende Wand nicht wahrnahm. Als der heftige Schmerz endlich nachließ, war ich wieder der Verzweiflung nahe. Ich konnte die Hand nicht mehr vor den Augen sehen, und der Gang war so niedrig, dass ich nur in gebückter

Haltung vorwärts kommen konnte. Schließlich musste ich mich auf die Knie herablassen und mich beim Vorwärtskriechen auf den Händen abstützen. In meinem Hirn hämmerte nur ein Gedanke: du hast dich nun doch geirrt und bist in eine Sackgasse geraten. Ein so niedriger Gang kann keinen Ausgang haben! Gleich kommst du nicht mehr weiter und hast die furchtbare Gewissheit! Ich muss es eingestehen: ich bin wohl nicht nur wie ein Hund auf allen Vieren gekrochen – ich habe gewiss auch wie ein solcher gewinselt. In diesem Augenblick habe ich alle Würde und Selbstachtung verloren. Was taugt mein Geschwätz von vorhin, als ich Wan kühl rechnend die Trennung vorschlug und wo sich meine Klugheit in meinen eigenen Ohren zu bestätigen schien. Ich bin jetzt einfach nur im Irrtum, und zahle dafür mit meinem Leben. Wie zur Bestätigung dieses hoffnungslosen Gedankens stoße ich in diesem Augenblick mit den Händen vor mir an eine Wand. Mir entfährt ein kurzer Schrei. Aus, vorbei. Ich lasse mich auf den Bauch fallen und berge mein Gesicht in den sandigen Händen.

Ich weiß nicht, wie lange ich so gelegen habe. Plötzlich nehme ich durch meine Finger einen Lichtschein wahr. Ich hebe den Kopf – die Wand vor mir ist verschwunden, und ich schaue in das feiste Gesicht des Mandarins der 38.-ten Rangstufe. Einige Diener ziehen mich aus dem Gang, und ich finde mich in einem großen Saal wieder. Zu meinem Erstaunen hocken Meister Wan und Meister Li–Pu beide auf dem Boden. Sie weinen hemmungslos wie zwei kleine Kinder. Von ihrer stolzen Würde ist nichts mehr geblieben. Offenbar haben sie ähnliche Erlebnisse gehabt wie ich und glaubten sich auch dem Tode nahe. Aber wieso sind sie nicht eingemauert? Nur ich habe doch den richtigen Weg gefunden! Aus meiner Benommenheit reißt mich ein lauter Gongschlag.

Ausgang

Erschrocken wende ich mich um, und erblicke hinter mir in der ganzen Länge des Raumes in der Wand eine Vielzahl von Öffnungen, die durch Holzklappen verschlossen sind. Aus einer dieser Luken haben mich eben die Diener gezogen. Der Mandarin verbeugt sich vor mir und verkündet mit dem unverbindlichsten Lächeln, zu dem ein Chinese fähig ist: „Ich nehme Euch die Mühe des Zählens ab, Herr. Es sind 32 Stück!“ Erst allmählich fasse ich die schier unglaubliche Bedeutung dieser Zahl für die Prüfung in dem Labyrinth. „Ich gratuliere, Ehrwürdigster Herr. Da ihr alle Drei nun wieder hier versammelt seid, dürft Ihr auch glauben, dass es in dem Labyrinth gar keine Sackgassen gibt. *Jeder* Gang führt in eine neue Kammer. Nach dem Willen unseres gütigen Herrschers darf das Leben aller Anwärter auf das Amt bei der Auswahl nicht gefährdet werden.“ Mein fragender Gesichtsausdruck forderte den Mandarin zu weiteren Erklärungen auf: „Wie weise ist doch der Khan, nicht Eure Rechenkunst allein auf die Probe zu stellen! Über jeder Kammer des Labyrinths hat vielmehr der Wächter, der die Gänge verschlossen hat, Euren Gesprächen mit Meister Wan und Meister Li-Pu gelauscht. Wer ein so hohes Amt begehrt, muss nicht nur Mut und Verstand besitzen, es darf auch an der schwierig zu übenden Kunst nicht fehlen, die Argumente anderer trotz der eigenen Überzeugung anzuhören und zu erwägen. In diesem Labyrinth brechen wir den Stolz der Kandidaten, blicken hinter die Maske der eingeübten Höflichkeiten und sehen so, ob einer unter Gleichgestellten nicht doch nur den eigenen Vorteil sucht.“ Zu Wan und Li gewandt, die noch immer erschöpft am Boden kauern, fährt der Mandarin fort: „Erhebt Euch, ihr Herren! Der letzte Teil Eurer Prüfung steht nun an. In seiner strahlenden Gerechtigkeit erwartet Euch der Herrscher, um sich von jedem die Frage nach der Teilbarkeit der Zahl aus der letzten Kammer beantworten zu lassen. Ihr seid alle in einer fünften Kammer gewesen, und in jeder stand dieselbe Zahl. So folgt mir nun!“

Rückkehr

An dieser Stelle endet die Überlieferung. Am nächsten Tag klopft kurz vor 15.00 Uhr ein blasser junger Mann schüchtern an die Bürotür des Abteilungschefs im Technologiezentrum. Sofort wird die Tür schwungvoll geöffnet, und ein schelmisch dreinblickender Professor begrüßt ihn mit den Worten: „Herr Paulsen! Kommen Sie! Ich bin schon ganz neugierig zu erfahren, wie Marco Polo die Stelle beim Großkhan gekriegt hat.“ Die Tür wird hinter dem Kandidaten zugeworfen, und im Vorzimmer kommentiert eine völlig entgeisterte Sekretärin die Situation: „Jetzt ist er völlig übergeschnappt!“

Ende

Liebe Leser, hier endet die Geschichte. Wenn Sie einen vollständigen Schluss wünschen, schlüpfen Sie in die Rolle des Markus Paulsen und lösen Sie das Geheimnis der fünften Kammer. Wenn Sie es herausfinden, bekommt Paulsen den Job, anderenfalls ….

Erläuterungen und Hinweise

Marco Polo lebte von 1254 bis 1324 und er war bekannt für seine Reisen nach China. Am Hofe des chinesischen Kaisers hat er eine Prüfung zu bestehen: Er geht gemeinsam mit zwei Mitbewerbern durch ein Labyrinth mit fünf Stationen. In jeder Kammer haben die Bewerber Aufgaben zu lösen, die alle mit der Teilbarkeit von Zahlen zu tun haben. Spannend ist insbesondere das Geheimnis der fünften Kammer.

Erste Kammer/Hinweise

Hier wird eine einfache Abschätzung der möglichen Primteiler einer Zahl vorgenommen: wenn die gegebene Zahl keine Primzahl ist, ist wenigstens einer der Primfaktoren nicht größer als die Wurzel dieser Zahl.

Diese Abschätzung ist auch die Grundlage eines bereits in der Antike bekannten Verfahrens zur Ermittlung von Primzahlen: Setzt man die Primzahlen unterhalb 10 als bekannt voraus (also: $2, 3, 5$ und 7), so erhält *alle* Primzahlen zwischen 10 und $10 \cdot 10 = 100$, indem man aus den Zahlen $10, 11, \ldots, 100$ erst alle Vielfachen von 2 streicht (also alle geraden Zahlen), dann alle Vielfachen von 3, von 5, und zuletzt alle Vielfachen von 7. Das ist alles. Einige Zahlen werden dabei mehrfach gestrichen, wie z.B. die 30, da sie ein Vielfaches von 2, 3 und 5 ist. Übrig bleiben genau die 21 Primzahlen zwischen 10 und 100.

Das ist das *Sieb des Eratosthenes* (3. vorchristl. Jahrhundert).

Zweite Kammer/Hinweise

Hier hat Meister Wan einen tieferen Satz aus der Primzahltheorie angewendet.

Zunächst hat er nachgewiesen, dass die Zahl $3\,240\,001$ auf zwei wesentlich verschiedene Weisen als Summe von zwei Quadraten natürlicher Zahlen geschrieben werden kann:

$$1800^2+1 = 1800^2+1^2 = 3\,240\,001 = 1799^2+60^2$$

Die linke Darstellung sieht man schnell der Zahl selber an, die rechte ergibt sich mit der zweiten Binomischen Formel:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \qquad | + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$1800^2 + 1^2 = (1800-1)^2 + 2 \cdot 1800$$

Zum Zweiten sind aus der Zahlentheorie folgende zwei Dinge bekannt über Primzahlen > 2, die sich als Summe von zwei Quadraten schreiben lassen:

a) eine solche Primzahl ergibt bei der Division durch 4 den Rest 1. Dieses Kriterium erfüllt $3\,240\,001$ noch.

b) Für eine solche Primzahl existiert nur **eine** solche Darstellung (als Summe zweier Quadratzahlen) (abgesehen vom Tausch der Summanden untereinander).

Die Zahl $3\,240\,001$ kann also keine Primzahl sein, da sie **zwei** verschiedene Darstellungen als Summe von zwei Quadraten besitzt.

Und in der Tat ist $3\,240\,001 = 1741 \cdot 1861$, wobei beide dieser Faktoren Primzahlen sind.

Dritte Kammer/Hinweise

Was Meister Wan in dieser Kammer angewendet hat, kennen spätere Zeiten als den *Satz von Wilson* (Sir John Wilson, 1741-1793)[1]. Es handelt sich dabei um das bis heute theoretisch einfachste Mittel zur Charakterisierung einer natürlichen Zahl als Primzahl:

[1] Dieser Satz wurde zuerst von Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) im Jahre 1770 bewiesen.

Eine natürliche Zahl $n>1$ ist genau dann eine Primzahl, wenn sie das um 1 vermehrte Produkt aller Zahlen von 1 bis $(n-1)$ teilt.

Oder anders ausgedrückt: Eine natürliche Zahl $n>1$ ist genau dann eine Primzahl, wenn gilt:

$(n-1)! \equiv -1 \mod n$ bzw. $(n-1)!+1 \equiv 0 \mod n$.

Das Zeichen $\equiv$ bedeutet, dass die linke Seite *kongruent* ist zur rechten bezüglich des angegebenen *Modulus*. In der Grundschule würde man sagen: *a ist kongruent zu b modulo n, wenn man beim Teilen von a durch n den Rest b erhält, z.B.:* $11 \equiv 2 \mod 3$

Mit den Zahlen des Rätsels aus Kammer 3 hat man dann einerseits:

Da 101 eine Primzahl ist, teilt sie die Zahl

$$z := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100 + 1$$

In die andere Richtung bedeutet dies: Man berechnet $z = 100! + 1$, und wenn z durch $n = 101$ teilbar ist, ist 101 eine Primzahl.

Da aber, wie Meister Wan erwähnt hat, das Produkt der ersten $(n-1)$ natürlichen Zahlen sehr rasch mit n anwächst (Mathematiker nennen dieses Produkt heutzutage eine Fakultät), eignet sich das Wilson-Kriterium leider nicht zum praktischen Nachweis einer größeren Zahl n als Primzahl.

Beispiel: Schon für die Primzahl 71 hat die zu prüfende Zahl $70! + 1$ mehr als 99 Stellen. Für kleine Zahlen kann man Wilson aber gut verifizieren: 5 ist prim, denn 5 teilt $4! + 1 = 25$ (aber 6 ist nicht prim, denn 6 teilt nicht $5! + 1 = 121$). Beispiel: Die obige Zahl z aus der dritten Kammer, hergeleitet aus der 3-stelligen Zahl $n = 101$, hat 158 Dezimalstellen ($z \approx 9{,}33 \cdot 10^{157}$)! Wollte man also mit dem Wilson-Kriterium $n = 101$ auf seine Primzahleigenschaft prüfen, müsste man erst diese riesige Zahl z berechnen.

Ohne Computer geht das sicher nicht.

Heutzutage braucht man dafür mit SageMath weniger als eine Sekunde:

```
sage: factorial(100)+1
CPU times: user 23 µs, sys: 8 µs, total: 31 µs
Wall time: 33.9 µs
93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000001
```

Diese Zahl lässt sich durch 101 teilen, wie man hier an der Faktorisierung sieht:

```
sage: factor(factorial(100)+1)
sage: factor(factorial(100)+1)
101 * 14303 * 149239 * 350433007170616328107072379 * 123528681657297251398503017534378708348512400771465312124056290542248784139238223033271959567362883048251014777364474207
```

Die Zerlegung von $z = 100! + 1$ in seine Primfaktoren dauert allerdings ein klein wenig länger, als die Berechnung von z. Mit `sage:%time factor(factorial(100)+1)!` kann man sich rückmelden lassen, wie lange genau es dauert. Der MacMini, an dem dieser Text editiert wurde, brauchte dazu gut 3 Minuten:

```
CPU times: user 3min 1s, sys: 182 ms, total: 3min 1s
Wall time: 3min 1s
```

Im Folgenden soll ein Gefühl gegeben werden, für welche Größenordnungen man auf dem PC noch realistischerweise die Fakultät berechnen kann: Die Berechnung der Fakultät $z = \left(10^7\right)!$ ist schon nach wenigen Sekunden erfolgreich und ergibt $1,20 \cdot 10^{65\,657\,059}$ – eine Zahl mit 65 657 060 Dezimalstellen. Vor 20 Jahren brauchte schon die Fakultät $z = \left(10^8\right)!$ eine Rechenzeit von einigen Stunden und stoppte dann mit einer Overflow-Meldung. Heute im Jahr 2020 mit SageMath liefert `sage:%time x=factorial(10**8)!` eine Rechenzeit wie folgt:

```
CPU times: user 49.5 s, sys: 1.87 s, total: 51.3 s
Wall time: 51.9 s
```

Man beachte, dass es, wenn man `sage:%time factorial(10**8)!` (ohne die Zuweisung `x=...`) verwendet, wesentlich länger dauert, da das Ergebnis dann von SageMath nicht nur berechnet, sondern auch auf den Bildschirm ausgegeben wird. Die Zahl $\left(10^8\right)!$ hat ca. achthundert Millionen Dezimalstellen.

Bei $\left(10^9\right)!$ geht die Berechnung schon nicht mehr so schnell:

```
sage:%time factorial(10**9)!
```

```
CPU times: user 11min 43s, sys: 4min 16s, total: 16min
Wall time: 22min 51s
```

Die Berechnung von $\left(10^{10}\right)!$ mit SageMath schafft der 8GB Mac Mini nicht mehr. Nach etwa einer Stunde stürzt das Programm ab und man erhält folgende Fehlermeldung Fehlermeldung:

```
/pathtosage/Contents/Resources/sage/src/bin/sage-python: line 2: 2305 Killed: 9sage -python "$@"
```

Die Größenordnung bzw. die Stellenzahl von Fakultäten kann man mit der sog. Stirlingschen Formel abschätzen:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Der auf eine ganze Zahl abgerundete Zehnerlogarithmus dieser Zahl gibt die Anzahl der Dezimalstellen $d_{n!}$ von $n!$ an. Für $n = 10$ hat demnach $10^{10}! = 10\,000\,000\,000!$ etwa 96 Milliarden Dezimalstellen:

```
sage: def stirling(n):
....:     ef=e.n()
....:     pif=pi.n()
....:     x=sqrt(2*pif*n)*((n/ef)**n)
....:     return x
....:
sage: stirling(10**10)
2.32579597597705e95657055186
sage: log(stirling(10**10),10)
9.56570551863666e10
```

Zum Vergleich: Die Anzahl der Atome im Universum (die sog. Eddington-Zahl) beträgt ca. 10^{80}, hat also 81 Dezimalstellen.

Heutzutage werden Zahlen mit mehr als 100 Dezimalen auf ihre Primalität untersucht (siehe z.B. https://primes.utm.edu/largest.html). Würde man für den Primalitätstest einer 100-stelligen Zahl das Wilson Kriterium heranziehen wollen, müsste man mindestens (10^{1}00)! berechnen können. Hier streikt sogar die Stirling-Abschätzung:

```
sage: stirling(10**100)
+infinity
```

Wenn man $n = 10^{100}$ in die Stirlingformel einsetzt und die Abschätzung der Dezimalstellen per Hand ausführt, kommt man auf fast 10^{102}. Das heißt, für mehr als hundertstelliges n hätte die Fakultät $n!$ mehr Dezimalstellen, als es Atome im Universum gibt. Man sieht: Das Wilson Kriterium hat für größere Zahlen keinen praktischen Nutzen.

Meister Wan konnte also nur deshalb so schnell urteilen, weil in der Aufgabe die Konstruktionsvorschrift der Zahl z bekannt gegeben wurde.

Vierte Kammer/Hinweise

In der vierten Kammer geht es um die berühmten *Fermat-Zahlen* (Pierre de Fermat, 1601-1665), die man erhält, indem man ganz bestimmte Zweierpotenzen um eins erhöht, und zwar diejenigen Zweierpotenzen, deren Exponent selbst eine Zweierpotenz ist:

$$F_n = 2^{\left(2^n\right)} + 1$$

Mittlerweile weiß man, dass die von Meister Wan beschriebene Vermutung falsch ist. Zwar hat man lange vermutet, das alle Fermat-Zahlen Primzahlen sind, aber Leonhard Euler (1707-1783) hat diese Vermutung für $n = 5$ widerlegt:

```
sage: def f(n):
....:     return(2**(2**n)+1)
....:
sage: for i in range(6):
....:     print(f'F_{i}=2**(2**{i})+1=2**{2**i}={f(i)}={factor(f(i))}')
....:
....:
```

```
F_0=2**(2**0)+1=2**1=3=3
F_1=2**(2**1)+1=2**2=5=5
F_2=2**(2**2)+1=2**4=17=17
F_3=2**(2**3)+1=2**8=257=257
F_4=2**(2**4)+1=2**16=65537=65537
F_5=2**(2**5)+1=2**32=4294967297=641 * 6700417
```

Die Zahl F_5 ist die Zahl, um die es in der vierten Kammer geht. Wie man sieht ist sie durch 641 teilbar. Euler hat den Faktor 641 nicht etwa dadurch gefunden, dass er F_5 nacheinander durch alle Primzahlen $2, 3, 5, 7, \ldots$ dividiert hat. Er fand einen mathematischen Trick, nämlich, dass jeder Primteiler von F_5 von der Form $64 \cdot k + 1$ sein muss:

```
sage: for k in range(11):
....:     print(f'k={k}: 64*{k}+1={64*k+1}={factor(64*k+1)}')
....:
k=0: 64*0+1=1=1
k=1: 64*1+1=65=5 * 13
k=2: 64*2+1=129=3 * 43
k=3: 64*3+1=193=193
k=4: 64*4+1=257=257
k=5: 64*5+1=321=3 * 107
```

```
k=6: 64*6+1=385=5 * 7 * 11
k=7: 64*7+1=449=449
k=8: 64*8+1=513=3^3 * 19
k=9: 64*9+1=577=577
k=10: 64*10+1=641=641
```

Euler musste demnach nur fünf Divisionen mit der Hand ausführen, da aus obiger Liste nur die Primzahlen als Teiler in Frage kommen.

Die sechste und siebte Fermatzahl wurden erst im Jahr 1855 bzw. 1970 vollständig faktorisiert:

```
F_6=2**(2**6)+1=2**64=18446744073709551617=274177 * 67280421310721
F_7=2**(2**7)+1=2**128=340282366920938463463374607431768211457=59649589127497217 * 5704689200685129054721
```

Selbst heute haben wir weder einen Beweis, ob $F_0, F_1, ... F_4$ die einzigen 5 primen Fermat-Zahlen sind, noch wissen wir, ob es unendlich viele Primzahlen von dieser Gestalt gibt. Für $n \geq 5$ hat man bisher noch keine weitere gefunden. Viele Details zu

Fermat-Zahlen finden sich unter http://www.prothsearch.com/fermat.html.

Primalitätstests für *sehr* große zufällige Zahlen funktionieren (noch) nicht. Dagegen gibt es sehr effiziente Algorithmen für bestimmte Zahlenformen. Da man mit den reinen Fermat-Zahlen keine großen Primzahlen finden konnte, werden insbesondere im GIMPS[2]-Projekt *Mersenne*-Zahlen untersucht. Das sind Zahlen der Form

$$2^p - 1,$$

wobei p selbst eine Primzahl ist.

Die heutigen Primzahlrekorde wurden mit Zahlen von dieser Form aufgestellt.

```
sage: def mersenne(n):
....:     for i in range(1,n):
....:         if is_prime(i):
....:             print(f'{i}: 2**{i}-1={2**i-1}={factor(2**i-1)}')
....:
sage: mersenne(30)
2: 2**2-1=3=3
```

[2] Great Internet Mersenne Prime Search

```
3: 2**3-1=7=7
5: 2**5-1=31=31
7: 2**7-1=127=127
11: 2**11-1=2047=23 * 89
13: 2**13-1=8191=8191
17: 2**17-1=131071=131071
19: 2**19-1=524287=524287
23: 2**23-1=8388607=47 * 178481
29: 2**29-1=536870911=233 * 1103 * 2089
```

Unter den ersten 10 000 gibt es 22 solcher Primzahlen *p*.

```
sage: def countmersenne(N):
....:     count=0
....:     for i in range(1,N):
....:         if is_prime(i):
....:             if is_prime(2**i-1):
....:                 count=count+1
....:     return(count)
....:
sage: %time countmersenne(10000)
CPU times: user 9h 7min 26s, sys: 12 s, total: 9h 7min 38s
Wall time: 9h 7min 39s
22
```

Die derzeit größten bekannten Primzahlen sind Mersenne-Primzahlen:

$$2^{82\,589\,933} - 1$$

Diese Primzahl hat 24 862 084 Dezimalstellen (gefunden im Jahr 2018). Zum Vergleich: Im Jahr 2005 war man noch bei $2^{25\,964\,951} - 1$, die Zahl hat „nur“ 7 816 230 Dezimalstellen.

Weitere Informationen zur Suche nach Primzahlformeln finden Sie ausführlich im CrypTool Buch (https://www.cryptool.org/images/ctp/documents/CT-Book-de.pdf) im Kapitel 3.

Fünfte Kammer – erster Hinweis

Die Zahl in der fünften Kammer ist das Produkt der beiden Primzahlen 29 153 und 36 833. Dem liegt ein tieferes Geheimnis zugrunde.

Sie können ergründen, warum für jede natürliche Zahl $n > 1$ die Summe aus der n-ten Potenz von 4 und der vierten Potenz von n stets eine zusammengesetzte Zahl ist. Man muss dazu das Ergebnis $N = 1\,073\,792\,449$ gar nicht ausrechnen.

Unter etwas glücklicheren Umständen und ohne die scheinbare Todesgefahr hätte das Marco Polo einsehen können.

Hilfestellung:

Versuchen Sie den (mehr oder weniger nahe liegenden) Faktorisierungsansatz für eine Summe:

$$N = n^4 + 4^n \qquad \text{für } n = 15$$

$$15^4 + 4^{15} = \left(15^2 + 15a + 2^{15}\right) \cdot \left(15^2 - 15a + 2^{15}\right)$$

Die rechte Seite wird nun mit Hilfe des Distributivgesetzes ausmultipliziert:

$$\left(15^2+15a+2^{15}\right)\cdot\left(15^2-15a+2^{15}\right)$$
$$= 15^4 - 15^3a + 2^{15}\cdot 15^2 + 15^3a - 15^2a^2 + 2^{15}\cdot 15a$$
$$+ 2^{15}\cdot 15^2 - 2^{15}\cdot 15a + 4^{15}$$
$$= 15^4 + 2^{15}\cdot 15^2 - 15^2a^2 + 2^{15}\cdot 15^2 + 4^15$$
$$= 15^4 + 2^{16}\cdot 15^2 - 15^2a^2 + 4^{15}$$
$$= 15^4 + \underbrace{(2^8)^2\cdot 15^2 - 15^2a^2}_{\overset{!}{=}0} + 4^{15}$$

Da der mittlere Teil verschwinden muss, wenn man auf 15^4+4^{15} kommen will, folgt:

$$a = 2^8 = 256$$

Damit kann man nun mit wenig Rechenaufwand und ohne Computer eine Zerlegung von 15^4+4^{15} in Faktoren angeben:

$$15^2 \pm 15a + 2^{15} = 225 \pm 15\cdot 256 + 32\,768$$
$$= \begin{cases} 225+3840+32768 \ = \ 3683 \\ 225-3840+32768 \ = \ 2915 \end{cases}$$

Deshalb hätte man also nicht nur leicht die Frage (prim oder nicht prim) beantworten können, sondern sogar die beiden Faktoren bestimmen können. Diese Faktoren müssen *nicht* prim sein, hier sind sie es aber:

```
sage: factor(15**4+4**15)
29153 * 36833
```

Hinter diesem Ansatz verbirgt sich, mathematisch ausgedrückt, eine Zerlegung des Polynoms $f(x) = x^4 + 4^n$ in zwei quadratische Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Damit dies möglich ist, muss n ungerade sein. Dazu mehr im noch folgenden zweiten Hinweis zur fünften Kammer.

Marco Polo's wahrscheinlichkeitstheoretische Vermutung zu der Dominanz kleiner Teiler bei zusammengesetzten Zahlen wurde später bewiesen. Man kann für jede natürliche Zahl $a > 1$ nämlich folgendes zeigen (siehe Literaturverzeichnis, [5]):

Unter den ersten m natürlichen Zahlen $1, 2, 3, ..., m$ konvergiert der relative Anteil der Zahlen mit Primteilern oberhalb a (das ist die Anzahl der Zahlen aus $\{1,2,3,\ldots,m\}$, von denen jede ausschließlich Primteiler $\geq a$ hat, dividiert durch m) für $m \to \infty$ gegen folgendes Produkt:

$$(*)\ \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Hierbei ist p die größte Primzahl unterhalb von a. Dieser Grenzwert und damit der relative Anteil von Zahlen mit Primteilern ausschließlich oberhalb a wird für größer gewähltes a also auch immer kleiner.

Beispiel: Da 7 die größte Primzahl kleiner 10 ist, konvergiert der relative Anteil der ersten m Zahlen mit Primteilern ausschließlich oberhalb 10 für wachsendes m gegen

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)=\frac{8}{35}=0{,}228\,571\ldots$$

Also rund 23 % aller Zahlen $1,2,3,\ldots,m$ (bei großem m) haben *keine* Primteiler 2, 3, 5 und 7.

Das folgende SageMath Listing zeigt, wie man sich für $a=7$ und $m=50$ alle Zahlen $z \in \{7,\ldots,50\}$ auflisten lassen kann, deren sämtliche Primteiler ≥ 7 sind:

```
#list numbers z with a<=z<=m with only large prime divisors
sage: def lst(a,m):
....:     l=[z for z in range(a,m+1) if all(z%p!=0 for p in prime_range(a))]
....:     return(l)
....:
sage: lst(7,50)
[7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49]
```

Hier ist die 49 die einzige nicht-Primzahl. Wenn man sich nur die nicht-Primzahlen in so einer Liste anschauen will, geht das z.B. so:

```
#list numbers z with a<=z<=m with only large pr.div's, but leave out the primes
sage: def lst_lop(a,m):
....:     return([z for z in lst(a,m) if is_prime(z)==False])
....:
sage: lst_lop(7,50)
[49]
```

Das ist vor allem für größeres *m* interessant:

```
sage: lst_lop(11,200)
[121, 143, 169, 187]
```

Um die oben angeführte Formel (∗) (siehe S. 59) plausibel machen zu können, muss man nicht explizit die Liste `lst(a,m)` kennen, sondern die Anzahl ihrer Elemente:

```
#count numbers z with a<=z<=m with only large prime divisors
sage: def cnt(a,m):
....:     count=0
....:     for z in range(a,m+1):
....:         if all(z%p!=0 for p in prime_range(a)):
....:             count=count+1
....:     return(count)
....:
sage: cnt(11,200)
46
sage: cnt(7,50)
13
```

Nun kann man den Bruchteil dieser Zahlen bezogen auf *m* berechnen lassen:

```
#fraction of cnt(a,m) relative to m
```

```
sage: def frac(a,m):
....:     return(cnt(a,m)/m)
....:
sage: frac(11,200)
23/100
```

Jetzt sind wir auch soweit, dass wir für große m und $a = 11$ diesen Bruchteil mit dem Produkt $(1 - \frac{1}{2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{7}) = \frac{8}{35}$ vergleichen können:

```
sage: frac(11,100).n()
0.210000000000000
sage: frac(11,200).n()
0.230000000000000
sage: frac(11,1000000).n()
0.228570000000000
sage: 8/35.n()
0.228571428571429
```

Allgemeiner für beliebiges a und m:

```
#product to which frac(a,m) converges for m-->infty
sage: def prdct(a):
....:     x=1
....:     for p in prime_range(a):
....:         x=x*(1-1/p)
....:     return(x)
....:
```

```
sage: frac(53,100000).n()
0.138970000000000
sage: prdct(53).n()
0.138704092635850
```

Bemerkungen zu einem anderen „Anteil“:

Der Anteil der *Primzahlen* unter den ersten m Zahlen ($m \geq 2$) ist geringer als $\frac{2}{\ln(m)}$. Hierbei ist ln(m) der natürliche Logarithmus der Zahl m. Dieser Anteil strebt mit wachsendem m also gegen Null. Primzahlen unter den ersten m Zahlen sind bei immer größer gewähltem m also auch immer dünner gesät.

Und nun viel Glück, dem tieferen Geheimnis der fünften Kammer auf die Spur zu kommen! Zur Erinnerung: Es ging um die Frage der Faktorisierbarkeit des Polynoms $f(x) = x^4 + 4^n$ für positive ganzzahlige n.

Fünfte Kammer – Zweiter Hinweis und Lösung

Die Behauptung lautet:

$N := n^4 + 4^n$ ist zusammengesetzt für alle natürlichen Zahlen $n > 1$

Beweis:

1. Fall: n gerade

Hier sieht man sofort ein, dass N dann auch gerade ist, da man die 2 aus $n^4 + 4^n$ ausklammern kann. Außerdem ist $N > 2$, also ist N zusammengesetzt.

2. Fall: n ungerade

Für ein ungerades $n > 1$ ist das Polynom $f(x) = x^4 + 4^n$ zerlegbar in ein Produkt zweier Polynome mit ebenfalls ganzzahligen Koeffizienten:

$$f(x) = (x^2 + 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot x + 2^n) \cdot (x^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot x + 2^n)$$

$$
\begin{aligned}
& (x^2 + 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot x + 2^n) \cdot (x^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot x + 2^n) \\
= \; & x^4 - 2^{\frac{n+1}{2}} x^3 + 2^n x^2 \\
& + 2^{\frac{n+1}{2}} x^3 - \left(2^{\frac{n+1}{2}}\right)^2 x^2 + 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2^n x \\
& + 2^n x^2 - 2^n \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} x + \left(2^n\right)^2 \\
= \; & x^4 + (2 \cdot 2^n - 2^{2 \cdot \frac{n+1}{2}}) x^2 + 2^{2 \cdot n} \\
= \; & x^4 + (2^{n+1} - 2^{n+1}) x^2 + 4^n \\
= \; & x^4 + 4^n = f(x)
\end{aligned}
$$

Mit SageMath kann man Polynome leicht faktorisieren:

```
sage: def pn(n):
....:     return(x^4+4^n)
....:
sage: for i in range(10):
....:     print(f'{i}: {pn(i)}={factor(pn(i))}')
....:
....:
0: x^4 + 1=x^4 + 1
1: x^4 + 4=(x^2 + 2*x + 2)*(x^2 - 2*x + 2)
2: x^4 + 16=x^4 + 16
3: x^4 + 64=(x^2 + 4*x + 8)*(x^2 - 4*x + 8)
4: x^4 + 256=x^4 + 256
5: x^4 + 1024=(x^2 + 8*x + 32)*(x^2 - 8*x + 32)
```

```
6: x^4 + 4096=x^4 + 4096
7: x^4 + 16384=(x^2 + 16*x + 128)*(x^2 - 16*x + 128)
8: x^4 + 65536=x^4 + 65536
9: x^4 + 262144=(x^2 + 32*x + 512)*(x^2 - 32*x + 512)
```

Man sieht, dass die Polynome mit geradem n über $\mathbb{Z}$ nicht zerfallen. Allerdings sei erwähnt, dass das Polynom $f(x)$ sehr wohl zerfällt, wenn man komplexe Zahlen als Koeffizienten erlaubt:

```
sage: R.<x>=ZZ[]
sage: def pn(n):
....:     return(x^4+4^n)
....:
sage: factor(pn(4))
x^4 + 256
sage: pn(4).change_ring(QQ).factor()
x^4 + 256
sage: pn(4).change_ring(CC).factor()
(x - 2.82842712474619 - 2.82842712474619*I) * (x - 2.82842712474619 + 2.82842712474619*I) * (x + 2.82842712474619 - 2.82842712474619*I) * (x + 2.82842712474619 + 2.82842712474619*I)
```

Die Koeffizienten sind hier natürlich gerundet. Wenn man die Koeffizienten der Linearfaktoren (also die Wurzeln bzw. Nullstellen) von $f(x)$ über $\mathbb{C}$ exakt ausgeben will, geht das mit SageMath auch, und zwar so:

```
sage: f=pn(4)
sage: roots=f.roots(QQbar,multiplicities=False)
sage: algroots=[roots[i].radical_expression() for i in range(len(roots))]
sage: algroots
[-4*(-1)^(1/4), 4*I*(-1)^(1/4), -4*I*(-1)^(1/4), 4*(-1)^(1/4)]
```

Wenn wir nun zurückgehen zur Zahl N, die man erhält, wenn man n in $f(x)$ einsetzt (also $x = n$), ergibt sich so eine explizite Zerlegung der Zahl $N = n^4 + 4^n$ für ungerades n:

$$N = n^4 + 4^n = (n^2 + 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n + 2^n) \cdot (n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n + 2^n)$$

Der Vollständigkeit halber mache man sich noch klar, dass beide Faktoren > 1 sind für $n > 1$. Also ist N zusammengesetzt.

Beispiele:

```
sage: def pl(n): #the plus-factor
....:     return(n^2+2^((n+1)/2)*n+2^n)
....:
sage: def mi(n): #the minus factor
....:     return(n^2-2^((n+1)/2)*n+2^n)
....: }
sage: for i in srange(3,16,2):
....:     print(f'{i}: N={i}^4+4^{i}={pl(i)*mi(i)}={pl(i)}*{mi(i)}')
....:
3: N=3^4+4^3=145=29*5
5: N=5^4+4^5=1649=97*17
7: N=7^4+4^7=18785=289*65
9: N=9^4+4^9=268705=881*305
11: N=11^4+4^11=4208945=2873*1465
13: N=13^4+4^13=67137425=10025*6697
15: N=15^4+4^15=1073792449=36833*29153
```

Die Faktoren, die bei dieser Zerlegung entstehen, müssen selbst keine Primzahlen sein. Für $n = 15$ ist das aber zufällig der Fall:

```
sage: factor(13^4+4^13)
5^2 * 37 * 181 * 401
```

```
sage: factor(15^4+4^15)
29153 * 36833
```

Ich weiß nicht, wer dieses Problem zuerst stellte oder wer es zuerst löste. Aber es wird als Übungsaufgabe für Zahlentheoriestudenten genutzt.

Literatur

[1] G. Hardy / E.M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers, fifth ed.,* Clarendon Press, Oxford (1984).

[2] K. Prachar: *Primzahlverteilung,* Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg (1957).

[3] A.E. Ingham: *The Distribution of Primes Numbers,* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, no. 30 (1990).

[4] D.M. Bressoud / S. Wagon: *A Course in Computational Number Theory,* Springer-Textbooks (with CD-ROM) (2000).

[5] R. Warlimont: *Eine Bemerkung zu einem Ergebnis von N.G. de Bruijn,* Monatshefte für Mathematik 74 (1970), 273-276.

[6] http://www.utm.edu/research/primes/notes

Herzlichen Dank noch einmal an Dr. C. Elsner für den ersten Draft der Erläuterungen (siehe auch http://www.heise.de/ct/story/01_21/) und an Hr. G. Kramarz-von Kohout für die Unterstützung bei den Erläuterungen.

Bernhard Esslinger und Doris Behrendt